# Wahrscheinlichkeitstheorie 1

# Blatt 7

**Aufgabe 1** *(4 Punkte)*
Gegeben $g, h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Die Faltung von $g$ und $h$ ist definiert durch

$$(g * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)h(y)\mathrm{d}y, \ x \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $g * h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\|g * h\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|g\|_{\mathcal{L}^1}\|h\|_{\mathcal{L}^1}$.

(b) $g * h = h * g$.

(c) $\widehat{g * h} = \widehat{g} \cdot \widehat{h}$.

(d) Es sei $g(x) = e^{-\alpha x^2}$ und $h(x) = e^{-\beta x^2}$ wo $\alpha, \beta > 0$ mit $d = 1$. Zeigen Sie, dass für die Faltung gilt

$$(g * h)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \beta}} e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Hinweis:** (a),(b),(c) können direkt nachgerechnet werden. Für (d) führen Sie eine geeignete quadratische Ergänzung durch.

**Aufgabe 2** *(4 Punkte)*
Gegeben $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Es sei $T : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $T(x, y) = x + y$. Die Faltung von $\mu$ und $\nu$ ist definiert durch $\mu * \nu = (\mu \otimes \nu) \circ T^{-1}$. Zeigen Sie:

(a) Für jede bezüglich $\mu * \nu$ integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)(\mu * \nu)(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)\mu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y). \tag{1}$$

Folgern Sie daraus $\mu * \nu = \nu * \mu$ und

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(A - x)\nu(\mathrm{d}x), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

wo $A - x := \{y \in \mathbb{R}^d \mid y + x \in A\} = \{y - x \mid y \in A\}$.

(b) Hat $\mu$ eine Dichte $g$ so hat $\mu * \nu$ die Dichte

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)\nu(\mathrm{d}y).$$

(c) Hat $\mu$ eine Dichte $g$ und $\nu$ eine Dichte $h$, so hat $\mu * \nu$ die Dichte $g * h$.

(d) Es gilt $\widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu} \cdot \widehat{\nu}$.

**Aufgabe 3** *(4 Punkte)*
Es seien $X, Y$ zwei unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und Verteilungen $\mu_X$, $\mu_Y$. Zeigen Sie, dass die Verteilung von $X+Y$ gegeben ist durch $\mu_X * \mu_Y$, d.h. $\mu_{X+Y} = \mu_X * \mu_Y$.
**Hinweis:** Benutzen Sie (1).

**Aufgabe 4** *(4 Punkte)*
Es sei $C^k(\mathbb{R}^d)$ der Raum der $k$-mal stetig differenzierbaren Funktionen, wo $k \geq 1$. Für $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ definiere den Laplace Operator durch

$$(\Delta f)(x) := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt für jedes $j \in \{1, \ldots, d\}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} g(x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}x.$$

(b) Es sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $g \in C^2(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\Delta f)(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(\Delta g)(x)\mathrm{d}x.$$

**Hinweis:** Wegen $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ können wir den Integrationsbereich auf ein geeignetes Rechteck einschränken. Führen Sie die Behauptung in Teil (a) mittels Fubini auf den eindimensionalen Fall zurück. Teil (b) folgt aus Teil (a).

**Aufgabe 5** *(4 Punkte)*

Es sei $R > 0$ und $Q_R = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid -R \leq x_j \leq R, \quad j = 1, \ldots, d\}$ der Quader mit Durchmesser $2R$. Die äussere Normale auf

$$\partial Q_R = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in Q_R \mid x_j \in \{-R, R\}, \quad \text{für ein } j = 1, \ldots d\}$$

ist gegeben durch $n(x) = (n_1(x), \dots, n_d(x))^T$, wo

$$n_j(x) = \mathbb{1}_{\{x_j=R\}}(x) - \mathbb{1}_{\{x_j=-R\}}(x), \quad x \in \partial Q_R.$$

Es sei $\sigma$ ein Maß auf $\mathbb{R}^d$ gegeben durch

$$\sigma(\mathrm{d}x) = \sum_{j=1}^{d} m_R(\mathrm{d}x_1) \otimes \cdots \otimes m_R(\mathrm{d}x_{j-1}) \otimes (\delta_R(\mathrm{d}x_j) + \delta_{-R}(\mathrm{d}x_j)) \otimes \cdots \otimes m_R(\mathrm{d}x_d),$$

wo $m_R(\mathrm{d}x_j) = \mathbb{1}_{[-R,R]}(x_j) m(\mathrm{d}x_j)$. Dann heißt $\sigma$ Oberflächemaß auf $\partial Q_R$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Bestimmen Sie $\sigma(\partial Q_R)$ für alle $d \geq 1$. Wie lässt sich das Ergebnis geometrisch für $d = 1, 2, 3$ interpretieren?

(b) Es gilt $\sigma(\mathbb{R}^d \backslash \partial Q_R) = 0$.

(c) Für jedes $j = 1, \dots, d$ und $f, g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int_{Q_R} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} g(x) \mathrm{d}x = -\int_{Q_R} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}x + \int_{\partial Q_R} f(x) g(x) n_j(x) \mathrm{d}\sigma(x).$$

(d) Es gilt für $f, g \in C^1(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{Q_R} \nabla f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x = -\int_{Q_R} f(x) \cdot \nabla g(x) \mathrm{d}x + \int_{\partial Q_R} f(x) g(x) n(x) \mathrm{d}\sigma(x),$$

wo die Integrale komponentenweise definiert sind.